

Las raíces de esta ecuación son  $k = -2, -10$ . Por tanto, de (2), las ecuaciones de las tangentes buscadas son

$$y = x - 2 \quad \text{y} \quad y = x - 10.$$

En la figura 62 se han trazado estas tangentes.

**Ejemplo 3.** Hallar la ecuación de la tangente trazada del punto  $(8, 6)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$ .

**Ejemplo.** La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto  $(8, 6)$  es

$$y - 6 = m(x - 8), \quad (3)$$

en donde el parámetro  $m$  es la pendiente de la tangente buscada. De la ecuación (3),  $y = mx - 8m + 6$ , valor que sustituido en la ecuación de la circunferencia, da

$$x^2 + (mx - 8m + 6)^2 + 2x + 2(mx - 8m + 6) - 24 = 0,$$

la cual se reduce a

$$(m^2 + 1)x^2 - (16m^2 - 14m - 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

La condición para tangencia es

$$(16m^2 - 14m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(64m^2 - 112m + 24) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que sus soluciones son

$$m = \frac{1}{5}, \quad \frac{23}{11}.$$

Por tanto, de (3), las ecuaciones de las tangentes que cumplen las condiciones dadas, son

$$y - 6 = \frac{1}{5}(x - 8) \quad \text{y} \quad y - 6 = \frac{23}{11}(x - 8)$$

o sea,

$$x - 5y + 22 = 0 \quad \text{y} \quad 23x - 11y - 118 = 0.$$

### EJERCICIOS. Grupo 18

Dibujar una figura para cada ejercicio.

Los ejercicios 1-7 deben resolverse usando la condición de tangencia estudiada en el Artículo 44.

① Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$$

en el punto  $(-1, 6)$ .

② Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$$

que tengan de pendiente  $-\frac{3}{2}$ .

3. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto  $(-2, 7)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ .

4. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$  en el punto  $(6, 3)$ .

5. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$$

que son paralelas a la recta  $5x - 5y + 31 = 0$ .

6. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$$

que son perpendiculares a la recta  $4x - y + 31 = 0$ .

7. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto  $(6, -4)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$ .

8. Resolver el ejercicio 4 recordando que la tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

9. Resolver los ejemplos 1, 2 y 3 del Artículo 45 por el método indicado en el ejercicio 8.

10. Demostrar que la ecuación de la tangente a la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  en el punto de contacto  $P_1(x_1, y_1)$  es  $x_1x + y_1y = r^2$ . *Sugestión:* Usese el hecho de que  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ .

11. Por dos métodos diferentes, hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia  $9x^2 + 9y^2 + 18x - 12y - 32 = 0$ , cuya pendiente sea  $\frac{1}{2}$ .

12. Por dos métodos diferentes, hállese las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto  $(6, -4)$  a la circunferencia  $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 15 = 0$ .

13. Por el punto  $(-5, 4)$  se trazan tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0.$$

Hallar el ángulo agudo que forman estas tangentes.

14. Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 = 5$ , hallar los valores de  $k$  para los cuales las rectas de la familia  $x - 2y + k = 0$ :

- cortan a la circunferencia en dos puntos diferentes;
- son tangentes;
- no tienen ningún punto común con la circunferencia.

15. Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ , hallar los valores de  $m$  para los cuales las rectas de la familia  $y = mx + 3$ :

- corta a la circunferencia en dos puntos diferentes;
- son tangentes;
- no tienen ningún punto común con la circunferencia.

16. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente  $m$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  son  $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$ .

17. Hallar la ecuación de la normal a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$$

en el punto  $(6, -3)$ , y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia.

En cada uno de los ejercicios 18-20 hallar la ecuaciones de las tangente y normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para cada circunferencia y punto de contacto dados.

18.  $x^2 + y^2 = 34$ ;  $(3, 5)$ .

19.  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 15 = 0$ ;  $(0, 3)$ .

20.  $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 39 = 0$ ;  $(-2, 3)$ .